Přijímací zkouška - matematika

Jméno a příjmení – pište do okénka	*Číslo přihlášky*	*Číslo zadání*
		1

Grafy

1 Pro který z následujících problémů **není** znám žádný algoritmus s polynomiální časovou složitostí?

A Problém, zda v daném orientovaném grafu existuje cesta z daného vrcholu u do daného vrcholu v.
B Problém, zda je daný neorientovaný graf souvislý.
C Problém nalezení minimální kostry v daném neorientovaném hranově ohodnoceném grafu.
D Problém nalezení nejkratších cest mezi všemi dvojicemi vrcholů v daném orientovaném hranově ohodnoceném grafu.
***E** Problém, zda v daném neorientovaném grafu existuje cesta, která navštíví každý vrchol právě jednou.

---

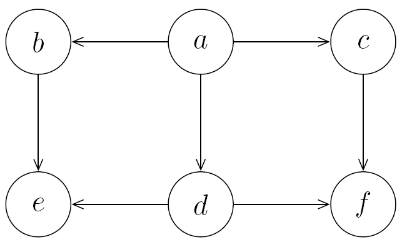
2 Kolik hran má obecně strom o n vrcholech?

A $\lfloor \log_2(n) \rfloor$
***B** $n - 1$
C $\lfloor n \cdot \log_2(n) \rfloor$
D $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$
E n^2

(Výše se pomocí $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celá část čísla x, tj. největší celé číslo, které je menší nebo rovno x.)

---

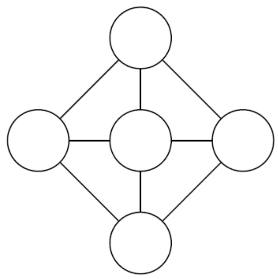
3 Uvažme následující orientovaný graf:



Která z následujících posloupností může vzniknout jako pořadí objevení nových vrcholů při prohledání grafu **do šířky** z vrcholu a?
(Nepředpokládáme žádné implicitní uspořádání množiny vrcholů. Pořadí, ve kterém algoritmus prohledání do šířky objevuje nové vrcholy, tak nemusí být jednoznačné.)

A a, b, e, d, c, f
***B** a, b, d, c, e, f
C a, d, e, f, b, c
D a, c, f, b, d, e
E a, b, d, e, c, f

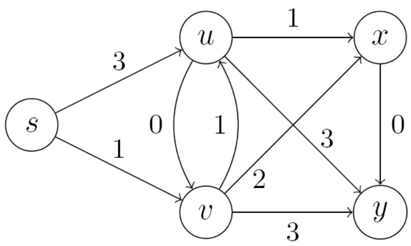
4 *Průměr* neorientovaného grafu $G = (V, E)$ je číslo $\max_{u,v \in V} d(u, v)$, kde $d(u, v)$ značí délku (tj. počet hran) nejkratší cesty z vrcholu u do vrcholu v. Čemu je roven průměr následujícího grafu?



A ∞
B 4
C 1
***D** 2
E 3

---

5 Uvažme následující orientovaný hranově ohodnocený graf:



Pro libovolnou dvojici jeho vrcholů z, z' označme $\delta(z, z')$ délku (tj. součet ohodnocení hran) nejkratší cesty z vrcholu z do vrcholu z'. Které z následujících tvrzení **je pravdivé**?

A $\delta(s, s) = 1$
B $\delta(s, v) = 0$
C $\delta(s, x) = 4$
D $\delta(s, u) = 3$
***E** $\delta(s, y) = 3$

Lineární algebra

---

6 Uvažte následující systém lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$:

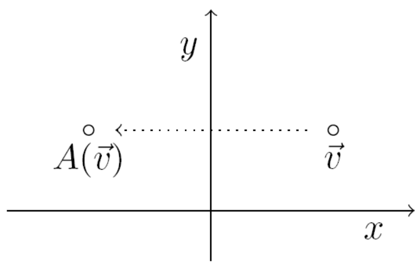
$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 5 \\ x & + & 2y & = & 6 \\ 2x & + & y & = & 8 \end{array}$$

Které z těchto tvrzení je pravdivé?

A Jediné řešení je $x = 4, y = 1$.
B Existuje právě jedno řešení (ale není to ani $x = 3, y = 2$ ani $x = 4, y = 1$).
C Jediné řešení je $x = 3, y = 2$.
***D** Neexistuje žádné řešení.
E Existuje více než jedno řešení.

---

7 Která z následujících matic zadává lineární zobrazení A z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, které překlápí rovinu podle osy y (jak naznačuje obrázek níže)?



A $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

***B** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

E $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

---

8 Které z následujících zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ **není** lineární?
(Zobrazení f je lineární, pokud splňuje $f(x+y) = f(x)+f(y)$ a $f(c\cdot x) = c\cdot f(x)$ pro všechna x, y, c.)

***A** $f(x) = 2x \cdot 3x$
B $f(x) = 2x$
C $f(x) = 2x + 3x$
D $f(x) = 2x - 3x$
E $f(x) = 0$

---

9 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

A $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 7 & 10 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

***D** $\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$

E $\begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}$

---

10 Jakou dimenzi má lineární obal množiny vektorů $\{(1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$?
(Lineární obal množiny vektorů je prostor všech lineárních kombinací těchto vektorů.)

A 0
***B** 2
C 3
D 1
E ∞

Logika

---

11 Která z následujících formulí **není** v konjunktivním normálním tvaru (CNF)?

A $(A \vee B) \wedge C$
***B** $\neg(A \wedge B \wedge C)$
C $A \wedge B \wedge C$
D $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$
E $A \vee B \vee C$

---

12 Předpokládejme, že jsou všechny proměnné interpretované jako přirozená čísla (s nulou).
Pro kterou z uvedených hodnot proměnné x je následující formule pravdivá?
$\exists y\ \exists z\ ((x = y + z) \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0 \wedge y \neq z\,)$

A 0
B 2
C 1
***D** 3
E pro žádnou hodnotu z množiny $\{0,1,2,3\}$

---

13 Uvažme následující výrok: **Pro každé $x > 0$ platí, že je splněno $P(x)$.**
Který z následujících výroků získáme negací výše uvedeného výroku?

***A** Existuje $x > 0$ takové, že není splněno $P(x)$.
B Pro každé $x \leq 0$ platí, že není splněno $P(x)$.
C Existuje $x > 0$ takové, že je splněno $P(x)$.
D Pro každé $x \leq 0$ platí, že je splněno $P(x)$.
E Existuje $x \leq 0$ takové, že není splněno $P(x)$.

---

14 Která z následujících formulí je tautologie?
(Formule je tautologie, pokud je pravdivá ve všech ohodnoceních proměnných.)

A $(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow (C \vee \neg C)$
B $(A \wedge B) \Leftrightarrow (C \vee B)$
C $(A \wedge B) \Leftrightarrow (C \wedge B)$
***D** $(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow (C \wedge \neg C)$
E $A \Leftrightarrow C$

---

15 Předpokládejme, že proměnná x je interpretovaná jako celé číslo, symbol f je interpretovaný jako funkce, která každému číslu n přiřadí číslo $2n$, a symbol c je interpretovaný jako konstanta 99. Která z následujících formulí je za těchto předpokladů pravdivá?

A $\exists x \ (f(x) = c)$
B $\forall x \ (f(x) = c)$
C $\forall x \ (x \neq f(c))$
***D** $\exists x \ (x = f(c))$
E $\forall x \ (x = f(c))$

Matematická analýza

---

16 Která z následujících funkcí je lichá?
(Funkce f je lichá, pokud pro každé reálné číslo x platí $f(-x) = -f(x)$.)

***A** $\sin(x)$
B e^x
C $1 - x$
D $|x|$
E x^2

---

17 Která z následujících funkcí je derivací funkce $x \cdot e^{3x}$?

A e^{3x}
B $3 \cdot (1 + e^{3x})$
C 1
D $1 + 3e^{3x}$
***E** $e^{3x} \cdot (1 + 3x)$

---

18 Uvažme posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definovanou následujícím způsobem:
$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{pokud n je sudé} \\ -\frac{1}{2^n} & \text{jinak} \end{cases}$$
Čemu je rovna limita $\lim_{n \to \infty} a_n$?

A Limita neexistuje.
B 1
C $+\infty$
D -1
***E** 0

---

19 Uvažme funkci $f(x) = e^x$. Které z následujících tvrzení **není pravdivé**?

A Definičním oborem funkce f je množina $\mathbb{R}$.
B $f'(x) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$
C Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$.
***D** Oborem hodnot funkce f je množina $\mathbb{R}$.
E $f(0) = 1$
(f' označuje derivaci funkce f.)

---

20 Čemu je roven určitý integrál $\int_1^2 3x^2 dx$?

A 21
***B** 7
C 3
D 9
E 1

Množiny, relace, funkce

21 Nechť A je množina mohutnosti $n \in \mathbb{N}$. Jaká je mohutnost množiny $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$?
(Zde pro libovolnou množinu B označujeme $\mathcal{P}(B)$ potenční množinu množiny B, což je množina všech podmnožin množiny B.)

A 2^{2n}
B $2^{2^n+2^n}$
C n^2
D 2^{n^2}
***E** 2^{2^n}

22 Které množině je rovna množina $(A \setminus B) \setminus C$?
(Zde $X \setminus Y$ je množinový rozdíl množin X a Y, což je množina všech prvků množiny X, které nejsou v množině Y.)

A $A \setminus (B \cap C)$
***B** $A \setminus (B \cup C)$
C $(A \cup B) \setminus C$
D $(A \cap B) \setminus C$
E $A \setminus (B \setminus C)$

23 Nechť $S = \{a, b\}$, $T = \{b, c\}$ a $U = \{a, c\}$. Čemu je rovna množina $(S \times T) \cap (T \times U)$?

A $\emptyset$
B $\{(b, b), (c, c), (a, a)\}$
***C** $\{(b, c)\}$
D $\{(b, c), (a, b), (a, c)\}$
E $\{(b, c), (a, b)\}$

24 Uvažme funkci F typu $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definovanou takto: $F(n) = n^2$.
Funkce F

***A** není ani surjektivní ani injektivní
B je injektivní i surjektivní
C je bijektivní
D je surjektivní, ale není injektivní
E je injektivní, ale není surjektivní

25 Relace $\{(a, a)\}$ na množině $\{a, b, c\}$ **není**

A symetrická
***B** reflexivní
C tranzitivní
D neprázdná
E antisymetrická