Zadání a řešení testu z matematiky a zpráva o výsledcích přijímacího řízení do magisterského navazujícího studia od podzimu 2014

Zpráva o výsledcích přijímacího řízení

do magisterského navazujícího studia od podzimu 2014

Studium v českém jazyce

Počet podaných přihlášek	524
Počet přihlášených uchazečů	473
Počet uchazečů, kteří splnili podmínky přijetí	397
Počet uchazečů, kteří nesplnili podmínky přijetí	76
Počet uchazečů přijatých ke studiu, bez uvedení počtu uchazečů přijatých ke studiu až na základě výsledku přezkoumání původního rozhodnutí	397
Počet uchazečů přijatých celkem	397
Percentil pro přijetí	uspěli všichni uchazeči, kteří se zúčastnili přijímací zkoušky

Základní statistické charakteristiky

		Informatika	Matematika	Celkem
Počet otázek		30	25	55
Počet uchazečů, kteří se zúčastnili přijímací zkoušky		264	264	264
Nejlepší možný výsledek		30.00	25.00	55.00
Nejlepší skutečně dosažený výsledek		27.5	25	51.25
Průměrný výsledek		16.00	13.68	29.69
Medián		16.75	14.0	30.5
Směrodatná odchylka		4.96	5.02	8.41
	Percentil			
Decilové hranice výsledku *	10	9.33	7.0	18.65
	20	11.75	9.65	23.75
	30	13.25	11.0	26.0
	40	15.25	13.0	27.6
	50	16.75	14.0	30.5
	60	17.7	14.95	32.4
	70	18.75	16.25	34.03
	80	20.25	17.85	36.75
	90	22.50	20.0	39.68

* Decilové hranice výsledku zkoušky vyjádřené d1, d2, d3, d4, d5, d6, d7, d8, d9 jsou hranice stanovené tak, že rozdělují uchazeče seřazené podle výsledku zkoušky do stejně velkých skupin, přičemž d5 je medián.

Přijímací zkouška - Matematika

Jméno a příjmení – pište do okénka	*Číslo přihlášky*	*Číslo zadání*
		1

Matematická analýza

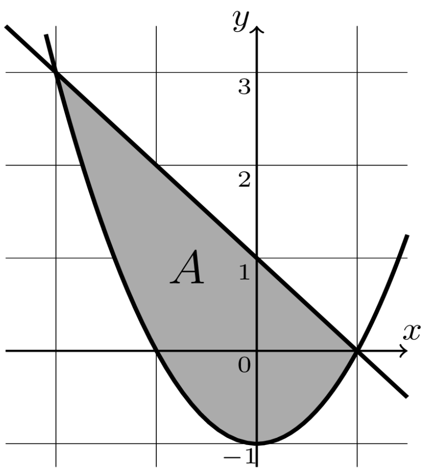
1 $\lim_{x\to\infty} 3 \cdot e^{-x} =$

A 3
B ∞
C $3 \cdot e$
***D** 0
E $-\infty$

2 Vypočtěte obsah rovinného útvaru A obsahujícího přesně ty body (x, y) splňující následující nerovnosti.

$$\begin{aligned} y &\geq x^2 - 1 \\ y &\leq 1 - x \end{aligned}$$

(Viz obrázek.)



***A** $\frac{9}{2}$

B 5

C $\frac{17}{4}$

D $\frac{11}{2}$

E $\frac{19}{4}$

3 Uvažme funkci

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

s definičním oborem $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Na které z uvedených množin je funkce f **neklesající**?

***A** $[2^{-\frac{1}{3}}, \infty)$

B $\emptyset$, tj. f je klesající na celém svém definičním oboru

C $[-1, 0) \cup (0, 1]$

D $(-\infty, -2^{-\frac{1}{3}}]$

E $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

4 Mějme funkci

$$f(x) = \sin(e^x).$$

Která z následujících funkcí je rovna derivaci funkce f?

A $\cos(e^x \cdot e^x)$
***B** $\cos(e^x) \cdot e^x$
C $\sin(\cos(e^x))$
D $\cos(e^x)$
E $\sin(e^x) \cdot e^x$

5 Do následujícího textu doplňte za A, B a C vhodné výrazy tak, aby výsledný text byl korektní definicí limity funkce:

Funkce f má v bodě x_0 limitu L, jestliže .....A..... $\varepsilon > 0$ .....B..... $\delta > 0$ .....C.....: pro libovolné x splňující $0 < |x - x_0| < \delta$ platí $|f(x) - L| \leq \varepsilon$.

A A: „pro libovolné", B: „a libovolné", C: „platí následující"
B A: „existují", B: „a" , C: „takové, že platí následující"
***C** A: „pro libovolné", B: „existuje", C: „takové, že platí následující"
D A: „existuje", B: „takové, že pro libovolné", C: „platí následující"
E A: „pro žádné", B: „neexistuje", C: „takové, aby platilo následující"

Lineární algebra

6 Uvažme lineární zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ otáčející rovinu o $180°$ po směru hodinových ručiček okolo bodu $(0,0)$. Která z následujících matic zadává (ve standardní bázi) uvedené zobrazení? Uvažujte násobení maticí zleva.

***A** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

E $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

7 Spočtěte determinant následující matice:
$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

A 0
B -6
***C** -2
D 5
E 12

8 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$

A Součin zadaných matic není definován.

B $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

***E** $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

9 Uvažme následující soustavu rovnic nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 4 \\ -3x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Které z následujících tvrzení je pravdivé?

A Všechny body $\mathbb{R}^3$ jsou řešením dané soustavy.
B Soustava nemá řešení.
***C** Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří přímku v $\mathbb{R}^3$.
D Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří rovinu v $\mathbb{R}^3$.
E Soustava má právě jedno řešení.

10 Které z následujících zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ je lineární?

A $f(x) = \sin(x)$

B $f(x) = x^2$

***C** $f(x) = \frac{22}{7}x$

D $f(x) = x^3$

E $f(x) = \frac{1}{x}$

Pravděpodobnost

11 Mějme náhodnou proměnnou X takovou, že $P(X = -1) = \frac{1}{2}$, $P(X = 2) = \frac{1}{3}$ a $P(X = 3) = \frac{1}{6}$. Vypočtěte **střední hodnotu** náhodné proměnné $Y = X^2$. (Zápis $P(X = a)$ značí pravděpodobnost toho, že náhodná proměnná X nabude hodnoty a.)

***A** $\frac{10}{3}$

B $\frac{4}{9}$

C $\frac{1}{18}$

D $\frac{17}{18}$

E $\frac{16}{3}$

12 Postupně dvacetkrát po sobě hodíme kostkou, přičemž jednotlivé hody jsou na sobě nezávislé. Jaká je pravděpodobnost toho, že **právě** osmkrát padne šestka?

A $(\frac{1}{6})^8$

B $\binom{20}{8} \cdot 8 \cdot \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot \frac{5}{6}$

C $\binom{20}{8} \cdot (\frac{1}{6})^7$

D $(\frac{1}{6})^8 \cdot (\frac{5}{6})^{12}$

***E** $\binom{20}{8} \cdot (\frac{1}{6})^8 \cdot (\frac{5}{6})^{12}$

13 Uvažme statistický soubor $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 9, 12, 22\}$. Označme m medián a p průměr tohoto souboru. Která z následujících možností platí?

A $m = 9$, $p = 7$
***B** $m = 5$, $p = 7$
C $m = 3$, $p = 7$
D $m = 7$, $p = 5$
E $m = 3$, $p = 5$

14 Hoďme dvakrát po sobě kostkou. Jaká je podmíněná pravděpodobnost toho, že při druhém hodu padne ostře větší číslo, než při hodu prvním, za podmínky, že součet čísel z obou hodů je sudý?

A $\frac{2}{3}$

B $\frac{15}{18}$

C $\frac{1}{6}$

***D** $\frac{1}{3}$

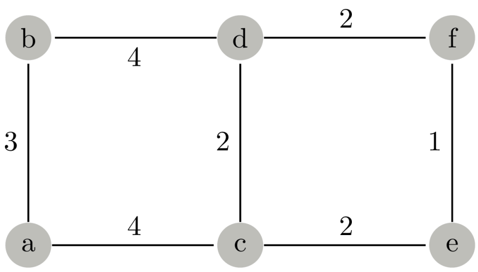
E $\frac{15}{36}$

Teorie grafů

15 Řekneme, že neorientovaný graf je **úplný**, jestliže neobsahuje smyčky a jestliže každé dva různé vrcholy jsou v něm spojeny hranou. Které z následujících tvrzení o úplném grafu o 7 vrcholech je pravdivé?

A Aby z grafu vznikl nesouvislý graf, musíme odebrat alespoň 8 hran.
B Graf má 42 hran.
C Po odebrání libovolných 7 hran vznikne nesouvislý graf.
***D** Aby z grafu vznikl nesouvislý graf, stačí odebrat 6 vhodných hran.
E Graf má 28 hran.

16 Uvažme následující hranově ohodnocený neorientovaný graf:



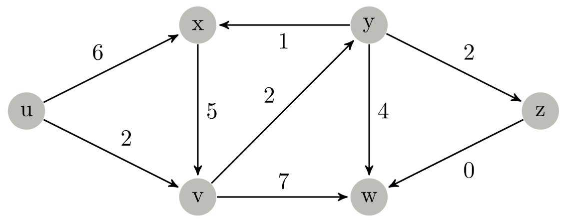
Jaká je váha (tj. součet ohodnocení hran) libovolné jeho minimální kostry?

A 14
B 18
C 15
D 7
***E** 12

17 Kolik nejméně hran může mít souvislý neorientovaný graf bez smyček o 103 vrcholech?

***A** 102
B 103
C 206
D 104
E 205

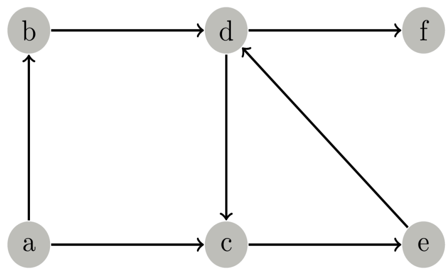
18 Uvažme následující hranově ohodnocený orientovaný graf:



Pro libovolnou dvojici jeho vrcholů s, s' označme $\delta(s, s')$ délku (tj. součet ohodnocení hran) nejkratší cesty z vrcholu s do vrcholu s'. Které z následujících tvrzení je pravdivé?

***A** $\delta(u, w) = 6$
B $\delta(v, w) = 7$
C $\delta(x, x) = 8$
D $\delta(u, x) = 6$
E $\delta(u, w) = 9$

19 Uvažme následující orientovaný graf:



Které z následujících tvrzení o prohledávání **do hloubky** začínajícím z vrcholu a platí? (Nepředpokládáme žádné uspořádání na vrcholech. Pořadí, ve kterém algoritmus prohledání do hloubky objevuje nové vrcholy, tedy není jednoznačně dáno.)

***A** Vrchol e může být navštíven jako poslední.
B Vrchol f bude vždy navštíven jako poslední.
C Vrchol c bude vždy navštíven dříve než vrchol d.
D Vrchol b nemůže být navštíven jako poslední.
E Vrchol b bude vždy navštíven dříve než vrchol f.

Množiny, relace, funkce, logika

20 Mějme množiny $M = \{a, b\}$ a $N = \{a, c\}$. Čemu je rovna množina $\mathcal{P}((M \times N) \cap (N \times M))$? (Zde $\mathcal{P}(X)$ značí množinu všech podmnožin množiny X).

A $\{\emptyset, a, (a, a)\}$
***B** $\{\emptyset, \{(a, a)\}\}$
C $\{\emptyset\}$
D $\{\emptyset, \{a\}\}$
E $\{\{(a, a)\}, \{(a, b)\}, \{(b, a)\}, \{(b, b)\}\}$

21 Která z následujících výrokových formulí je **tautologie**? (Velká písmena značí výrokové proměnné.)

A $(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
B $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge B)$
***C** $(A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
D $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee B)$
E $A \rightarrow \neg A$

---

22 Které z následujících tvrzení o uspořádaných množinách je pravdivé?

A Každá uspořádaná množina má buď minimální nebo maximální prvek.
B Uspořádaná množina může mít více různých největších prvků.
C Každá uspořádaná množina má buď nejmenší nebo největší prvek.
D Každá uspořádaná množina mající maximální prvek má i největší prvek.
***E** Každá uspořádaná množina mající nejmenší prvek má i minimální prvek.

---

23 Z následujících predikátových formulí vyberte formuli sémanticky ekvivalentní formuli

$$\neg\exists x \left((\forall y\, P(y,x)) \wedge (\exists z\, P(x,z))\right).$$

(Zde P je binární predikát a x, y, z jsou proměnné.)

A $(\exists x \exists y\, \neg P(y,x)) \vee (\exists x \forall z\, \neg P(x,z))$
B $\exists x \left((\forall y\, \neg P(y,x)) \vee (\exists z\, \neg P(x,z))\right)$
***C** $\forall x \left((\exists y\, \neg P(y,x)) \vee (\forall z\, \neg P(x,z))\right)$
D $\forall x \left((\exists y\, P(x,y)) \vee (\forall z\, P(z,x))\right)$
E $(\exists x \exists y\, \neg P(y,x)) \wedge (\exists x \forall z\, \neg P(x,z))$

---

24 Která z následujících relací na množině $\{a, b, c\}$ **není** tranzitivní?

***A** $\{(a,b), (b,c), (c,a)\}$
B $\{(a,a), (b,b), (c,c)\}$
C $\emptyset$ (tj. prázdná relace)
D $\{(a,b), (a,c)\}$
E $\{(a,b), (a,c), (b,c)\}$

---

25 Uvažme funkce F a G typu $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ (tj. přiřazují celým číslům celá čísla) definované následovně:

$$F(n) = n + 1$$
$$G(n) = -n.$$

Který z následujících výrazů je roven číslu -10?

A $G(G(10))$
***B** $F(G(F(10)))$
C $F(G(F(G(10))))$
D $G(F(G(-10)))$
E $G(F(F(G(-10))))$