Zadání a řešení testu z matematiky a zpráva o výsledcích přijímacího řízení do magisterského navazujícího studia od podzimu 2018

Zpráva o výsledcích přijímacího řízení

do magisterského navazujícího studia od podzimu 2018

Počet podaných přihlášek	444
Počet přihlášených uchazečů	390
Počet uchazečů, kteří splnili podmínky přijetí	245
Počet uchazečů, kteří nesplnili podmínky přijetí	145
Počet uchazečů přijatých ke studiu, bez uvedení počtu uchazečů přijatých ke studiu až na základě výsledku přezkoumání původního rozhodnutí	245
Počet uchazečů přijatých celkem	246
Percentil pro přijetí	29.00

Základní statistické charakteristiky

		Informatika	Matematika	Celkem
Počet otázek		30	25	55
Počet uchazečů, kteří se zúčastnili přijímací zkoušky		180	181	181
Nejlepší možný výsledek		30.00	25.00	55.00
Nejlepší skutečně dosažený výsledek		26.00	24.00	46.00
Průměrný výsledek		12.89	9.58	22.40
Medián		13.25	9.75	22.50
Směrodatná odchylka		5.40	5.01	9.17
	Percentil			
Decilové hranice výsledku *	10	5.50	3.25	10.25
	20	8.50	5.75	15.25
	30	10.50	7.00	19.00
	40	11.75	8.25	21.25
	50	13.25	9.75	22.50
	60	14.50	10.50	23.50
	70	15.75	11.50	26.25
	80	17.50	13.25	29.25
	90	20.00	16.25	34.50

* Decilové hranice výsledku zkoušky vyjádřené d1, d2, d3, d4, d5, d6, d7, d8, d9 jsou hranice stanovené tak, že rozdělují uchazeče seřazené podle výsledku zkoušky do stejně velkých skupin, přičemž d5 je medián.

Přijímací zkouška - Matematika

Jméno a příjmení – pište do okénka	*Číslo přihlášky*	*Číslo zadání*
		239

Množiny, relace, funkce, logika

---

1 Uvažme jazyk predikátové logiky s binárním predikátem Z a interpretaci, ve které univerzum je množina všech lidí a relace $Z(x, y)$ se interpretuje jako *„člověk x zná člověka y"*. Která z následujících formulí vyjadřuje tvrzení *„každého člověka někdo zná"*? (Pozn.: všimněte si, že relace $Z(x, y)$ není symetrická.)

A $\forall x\, \exists y\, Z(x, y)$

***B** $\forall y\, \exists x\, Z(x, y)$

C $\exists x\, \forall y\, Z(x, y)$

D $\forall x\, \forall y\, Z(x, y)$

E $\exists y\, \forall x\, Z(x, y)$

---

2 Která z následujících výrokových formulí je tautologie? (Zde A, B jsou různé výrokové proměnné.)

***A** $(A \Leftrightarrow B) \Leftarrow (A \wedge B)$

B $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \vee B)$

C $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \wedge B)$

D $(A \Leftrightarrow B) \Leftarrow (A \vee B)$

E $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow A$

---

3 Mějme libovolnou relaci R, která je relací částečného uspořádání na množině A. Předpokládejme, že uspořádaná množina (A, R) má právě dva maximální prvky. Které tvrzení o uspořádané množině (A, R) je obecně pravdivé?

A Uspořádaná množina (A, R) nemá nejmenší prvek.

B Uspořádaná množina (A, R) má jeden největší prvek.

C Uspořádaná množina (A, R) má nejmenší prvek.

D Uspořádaná množina (A, R) má dva největší prvky.

***E** Uspořádaná množina (A, R) nemá největší prvek.

---

4 Kolik prvků má množina

$(\{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 8\}) \setminus \{1, 2, 42\}$?

(Zde $A \setminus B$ značí množinový rozdíl množin A a B.)

A 1
B 2
C 5
D 4
***E** 3

---

5 Pro které z následujících funkcí f, g na množině racionálních čísel platí $(f \circ g \circ f^{-1})(1) = 1$? (Zde $f \circ g$ značí skládání funkcí, tj. funkci $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, a f^{-1} značí inverzi funkce f.)

A $f(x) = x,\ \ g(x) = 0$

***B** $f(x) = x + 1, \quad g(x) = 2x$

C $f(x) = x - 1,\ \ g(x) = 2x$

D $f(x) = x/2,\ \ g(x) = x + 2$

E $f(x) = x/2,\ \ g(x) = x - 2$

---

6 Která z následujících binárních relací R na množině celých čísel **není** tranzitivní?

A $R(x, y) \iff x = 3$

***B** $R(x, y) \iff x \neq y$

C $R(x, y) \iff x = y$

D $R(x, y) \iff x \neq 3$

E $R(x, y) \iff x < y$

Lineární algebra

---

7 Spočtěte součin $A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, pokud $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

A $\begin{pmatrix} -8 & 14 & 8 \end{pmatrix}$

***B** $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 28 \\ -22 \\ -10 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

E $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

---

8 Uvažme následující soustavu rovnic nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4, \\ 2x - y - 7z &= 10, \\ x - 2y - 4z &= 9. \end{aligned}$$

Které z následujících tvrzení je pravdivé?

A Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří přímku v $\mathbb{R}^3$.

***B** Soustava má právě jedno řešení.

C Soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž množina všech řešení tvoří rovinu v $\mathbb{R}^3$.

D Všechny body $\mathbb{R}^3$ jsou řešením dané soustavy.

E Soustava nemá žádné řešení.

---

9 Uvažme vektor, jehož souřadnice v bázi $[(1,0,1),(0,1,2),(1,1,1)]$ jsou $(1,3,-1)$. Jaké jsou jeho souřadnice v bázi $[(2,1,0), (2,1,2), (-1,0,1)]$?

***A** $(1,1,4)$

B $(-2,2,10)$

C $(3,-2,6)$

D $(11,2,5)$

E $(-12,-4,2)$

---

10 Vypočtěte $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

A $\begin{pmatrix} 6 & -4 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B Součin zadaných matic není definován.

C Žádná z ostatních možností není správná.

***D** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

E $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

---

11 Určete, která z následujících matic zadává lineární zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ odpovídající kolmé projekci na rovinu danou osami x a z.

A $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

***E** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matematická analýza

---

12 Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & x \geq 1, \\ x - 1 & x \leq 1 \end{cases}$$

je:

A chybně definovaná pro $x = 1$

B surjektivní, ale není injektivní

C sudá nebo lichá

D injektivní, ale není surjektivní

***E** bijektivní

---

13 Vypočtěte limitu $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{(\ln n)^3}$.

A 0

B Limita neexistuje.

***C** ∞

D $\dfrac{1}{6}$

E 1

---

14 Uvažme funkci $f(x) = \ln(\cos x)$. Spočtěte $f'(\pi/6)$.

A $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

B $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C $\dfrac{\pi}{12}$

D $-\dfrac{\pi}{12}$

***E** $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

---

15 Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Uvažme následující tvrzení D, I, S:

- D: f má konečnou první derivaci na $[a, b]$,
- I: integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a je konečný,
- S: funkce f je spojitá na $[a, b]$.

Rozhodněte, která dvojice implikací je obecně pravdivá.

A S $\Rightarrow$ I a I $\Rightarrow$ D

B D $\Rightarrow$ I a I $\Rightarrow$ S

C I $\Rightarrow$ D a D $\Rightarrow$ S

D S $\Rightarrow$ D a D $\Rightarrow$ I

***E** D $\Rightarrow$ S a S $\Rightarrow$ I

---

16 Spočtěte integrál $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + x^3\right) \mathrm{d}x$.

***A** $\frac{17}{4}$

B 6

C $\frac{13}{4}$

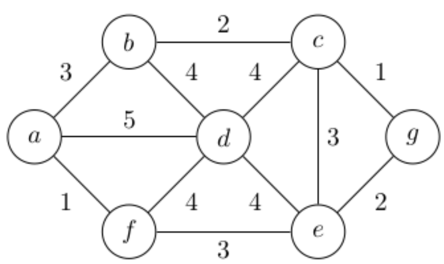
D $\frac{27}{4}$

E $\frac{11}{2}$

Teorie grafů

---

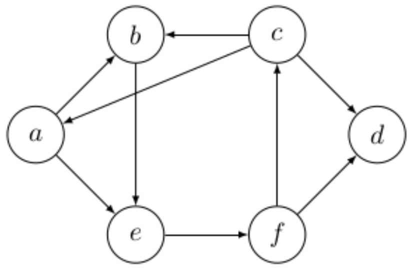
17 Uvažme následující hranově ohodnocený neorientovaný graf G:



Kolik existuje různých minimálních koster grafu G?

A 4
B 3
C 1
***D** 8
E 2

18 Uvažme následující orientovaný graf:



Rozhodněte, které z následujících tvrzení o prohledávání tohoto grafu do hloubky z vrcholu a obecně platí. (Nepředpokládáme žádné uspořádání na vrcholech. Pořadí, ve kterém algoritmus prohledávání do hloubky objevuje nové vrcholy, tedy není jednoznačně dáno.)

A Vrchol c může být objeven dříve než vrchol e.

***B** Vrchol f musí být objeven dříve než vrchol d.

C Vrchol b musí být objeven dříve než vrchol c.

D Vrchol f může být objeven jako poslední.

E Vrchol d musí být objeven jako poslední.

---

19 Nechť G je libovolný neorientovaný graf o 8 vrcholech. Pro jaké nejmenší číslo n obecně platí tvrzení *„pokud graf G obsahuje alespoň n hran, pak obsahuje cyklus"*?

A 36
B 1
C 7
D 9
***E** 8

---

20 Kolik navzájem neizomorfních podgrafů o 4 vrcholech má neorientovaná kružnice o 4 vrcholech, tj. graf C_4?

A 7
B 5
C 8
D 4
***E** 6

---

21 Kolik hran má úplný neorientovaný graf o n vrcholech, tj. graf K_n?

A n

B $n \cdot (n-1)$

C n^2

***D** $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$

E $n-1$

Pravděpodobnost

22 Na turnaj dorazilo 30 sportovců. Kolika způsoby je možné rozdělit sportovce do 3 soutěžních týmů po 10 členech?

A $\frac{30!}{(10!)^3}$

B Žádná z ostatních možností není správná.

C $\frac{30!}{3!}$

***D** $\frac{30!}{3! \cdot (10!)^3}$

E $30!$

---

23 Uvažme náhodnou veličinu X, která nabývá hodnot -1 a 1 a jejíž střední hodnota je $\frac{1}{2}$. Spočtěte **rozptyl** náhodné veličiny X.

A Ze zadaných hodnot není možné rozptyl jednoznačně určit.

***B** $\frac{3}{4}$

C $-\frac{1}{2}$

D $\frac{1}{4}$

E $\frac{1}{2}$

---

24 Mějme náhodné jevy A a B. Kdy jsou tyto jevy stochasticky nezávislé?

A Právě tehdy, když $P(A) \neq P(B)$.

B Právě tehdy, když $P(A) \cdot P(B) = 0$.

C Právě tehdy, když $P(A \cup B) = 1$.

***D** Právě tehdy, když $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$.

E Právě tehdy, když $P(A \cap B) = 0$.

---

25 Mějme klasickou šestistěnnou kostku, na které padá každé číslo se stejnou pravděpodobností, a uvažme následující hru: jednou hodíme kostkou; pokud padlo číslo 5 nebo 6, končíme, pokud padlo jiné, házíme ještě jednou a poté končíme. Jaká je pravděpodobnost, že na kostce někdy v průběhu hry padne číslo 5 nebo 6?

***A** $\frac{5}{9}$

B $\frac{4}{9}$

C $\frac{1}{3}$

D $\frac{2}{3}$

E $\frac{1}{2}$

Tato strana je prázdná.